www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

E désigne la $\mathbb{R}$–algèbre $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on rappelle que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de E.

Les quatre parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

PARTIE 1

Dans cette partie F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3, stable pour la multiplication.

On veut montrer $I \in F$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $I \notin F$.

1.1. Montrer que F et $\mathbb{R}I$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. (On rappelle que $\mathbb{R}I$ désigne la droite vectorielle engendrée par I, c'est-à-dire l'ensemble des matrices scalaires.)

1.2. On désigne alors par p la projection sur $\mathbb{R}I$ parallèlement à F.

a. Montrer que $\forall (M, M') \in E^2 \quad p(MM') = p(M)\,p(M')$.

b. En déduire que si M est un élément de E tel que $M^2 \in F$, alors $M \in F$.

1.3. Montrer que M_2 et M_3 appartiennent à F ainsi que M_1 et M_4.

1.4. Conclure.

PARTIE 2

Dans cette partie, on étudie certains endomorphismes de E.

On désigne par L(E) l'ensemble des endomorphismes de E.

2.1. À tout élément $A \in E$, on associe l'application $\Phi(A)$ de E dans E définie par :

$$\forall M \in E \quad |\Phi(A)|(M) = AM - MA.$$

a. Vérifier rapidement que $\forall A \in E \quad \Phi(A) \in L(E)$.

b. Montrer que l'application Φ ainsi définie de E dans L(E) qui, à $A \in E$, associe $\Phi(A)$ est linéaire. Déterminer $\Phi(\lambda I)$ (λ étant un réel).

c. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in E$ telle que $\Phi(A) = 0$.

Montrer que $b = c = 0$ et que $a = d$. (On pourra utiliser les matrices M_i.)

d. Déduire du *b.* et du *c.* que $\operatorname{Ker}\Phi = \mathbb{R}I$ et que $\operatorname{Im}\Phi$ est un sous-espace vectoriel de L(E) de dimension 3.

2.2. On pose : $D = \{ u \in L(E) / \forall (M, N) \in E^2 \; u(MN) = u(M)N + Mu(N) \}$

a. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de L(E).

b. Montrer que $\operatorname{Im}\Phi$ est inclus dans D.

2.3. Soit u un élément de D.

a. Montrer que $u(I) = 0$.

b. Calculer $M_2 \cdot M_2$; en déduire qu'il existe deux réels x et y tels que $u(M_2) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}$.

(On pourra poser $u(M_2) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$).

T.S.V.P.

c. De même, montrer qu'il existe deux réels z et t tels que : $u(M_3) = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{bmatrix}$.

d. Montrer que $y + z = 0$.

e. Soit alors $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $\begin{cases} a - d = y = -z \\ c = -x \\ b = -t \end{cases}$

Les réels x, y, z et t ayant été définis aux *b.* et *c.* ci-dessus, montrer que $\Phi(A) = u$.

2.4. Déduire de 2.2. et de 2.3. que $\text{Im}\,\Phi = D$.

PARTIE 3

Étude sur un exemple d'un endomorphisme $\Phi(A)$.

Dans cette partie, A désigne la matrice $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in E$. On note u l'endomorphisme $\Phi(A)$ de E. (C'est-à-dire u est l'endomorphisme de E défini par $u(M) = AM - MA$.)

3.1. Écrire la matrice de u relativement à la base (M_1, M_2, M_3, M_4) de E. On notera U cette matrice.

3.2. Déterminer une base du noyau de u et une base de l'image de u.

3.3. *a.* Montrer que A possède deux valeurs propres réelles et distinctes α et β que l'on déterminera.
Vérifier que $|\alpha - \beta| = 1$.

b. Montrer que $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ sont deux valeurs propres de u.

c. Déterminer une matrice P carrée, d'ordre 4, inversible telle que $P^{-1} U P$ soit diagonale.
Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

PARTIE 4

On veut, dans cette partie, généraliser le résultat obtenu au 3.3.*b.* de la partie précédente.

4.1. Soient α et β deux réels distincts et soit $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.
On note v l'endomorphisme $\Phi(D)$ de E. (Φ a été défini dans la partie 2.)
Écrire la matrice de v dans la base (M_1, M_2, M_3, M_4) de E.
Que remarquez-vous ?

4.2. Soit $A \in E$ possédant deux valeurs propres, réelles et distinctes, α et β. On rappelle que dans ce cas A est diagonalisable et on note P une matrice carrée d'ordre 2 inversible telle que $A = P \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} P^{-1}$.
On définit alors quatre éléments de E : M_i', $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ par $M_i' = P M_i P^{-1}$.
On note u l'endomorphisme $\Phi(A)$ de E.

a. Montrer que la famille (M_1', M_2', M_3', M_4') est une base de E constituée de vecteurs propres de u.

b. En déduire que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 0, $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail